電磁気学に必要なベクトル公式と定理

電磁気学を学習するにあたってベクトル場の微分演算は避けて通れない。特に、曲線座標では演算子の形が複雑で、板書による説明の大きな障害になる。かといって、デカルト座標だけを使っていたのでは、クーロン力の逆 2 条則の説明もままならない。

本リーフレットは講義の副教材として作成したもので、受講者の自己学習には自由に使っていただいて結構。

- ガウスの発散定理

  閉曲面 S で囲まれた領域 V に対して、任意のベクトル場 $\vec{A}$ は

  $$\int\int_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int\int\int_V \mathrm{div}\vec{A}dV$$

  を満足する。

- ストークスの定理

  閉曲線 C を境界とする曲面 S に対して、任意のベクトル場 $\vec{A}$ は

  $$\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{s} = \int\int_S \mathrm{rot}\vec{A}\cdot d\vec{S}$$

  を満足する。

- もし、ベクトル $\vec{A}$ が発散がなければ、$\vec{A} = \mathrm{rot}\vec{X}$ を満たすベクトル場 $\vec{X}$ が存在し、

  $$\mathrm{div}\vec{A} = \mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{X}) = 0$$

  となる。

- もし、ベクトル $\vec{A}$ が無回転であれば、$\vec{A} = \mathrm{grad}f$ を満たすスカラー場 f が存在し、

  $$\mathrm{rot}\vec{A} = \mathrm{rot}(\mathrm{grad}f) = 0$$

  となる。(渦無し)

表 1: デカルト座標、円筒座標、極座標におけるベクトル公式

	デカルト座標	円筒座標	極座標
線素 $d\vec{s}$	dx, dy, dz	$dr, rd\theta, dz$	$dr, rd\theta, r\sin\theta d\varphi$
勾配 $\mathrm{grad}\phi$ $= \nabla\phi$	$(\nabla\phi)_x = \frac{\partial\phi}{\partial x}$ $(\nabla\phi)_y = \frac{\partial\phi}{\partial y}$ $(\nabla\phi)_z = \frac{\partial\phi}{\partial z}$	$(\nabla\phi)_r = \frac{\partial\phi}{\partial r}$ $(\nabla\phi)_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}$ $(\nabla\phi)_z = \frac{\partial\phi}{\partial z}$	$(\nabla\phi)_r = \frac{\partial\phi}{\partial r}$ $(\nabla\phi)_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}$ $(\nabla\phi)_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}$
発散 $\mathrm{div}\vec{A}$ $= \nabla\cdot\vec{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta}$ $+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$
回転 $\mathrm{rot}\vec{A}$ $= \nabla\times\vec{A}$	$(\nabla\times\vec{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$ $(\nabla\times\vec{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$ $(\nabla\times\vec{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$	$(\nabla\times\vec{A})_r = \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}$ $(\nabla\times\vec{A})_\theta = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}$ $(\nabla\times\vec{A})_z = \frac{1}{r}(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta})$	$(\nabla\times\vec{A})_r = \frac{1}{r\sin\theta}(\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi})$ $(\nabla\times\vec{A})_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}$ $(\nabla\times\vec{A})_\varphi = \frac{1}{r}(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta})$
ラプラシアン $\Delta\phi$ $= \nabla\cdot(\nabla\phi)$	$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\phi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2})$ $+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$